対称デザイングラフ(グラフ理論とその応用)

伊藤, 昇

数理解析研究所講究録
566巻 1985年 74-75

対称デザイングラフ

甲南大 理 伊藤昇
(Noboru Ito)

対称デザインの存在と分類を代数的グラフの枠組のなかで考察することを提起したい．詳細は[1]を準備中なので，ここでは定義と基本的な質問を述べるだけにする．

サイズvの± 1ベクトル全部の集合Vは成分毎乗法により位数2^vの基本アーベル群を作る．Vを頂点集合とし，2頂点u, vは内積(u, v)が$v-4n$に等しいとき隣接であるとしてグラフを構成する。ここで$v>k>\lambda>0$は自然数で$n=k-\lambda$である．uの-1という成分の個数をuの重さと呼ぶ．Vの単位元j（全1ベクトル）をふくむ連結成分は重さが偶数であるVのベクトル全部の作る部分群Eに等しい．jの近傍は重さ$2n$のベクトル全部の集合W_{2n}である．EはW_{2n}で生成されるので，EはW_{2n}による共役類グラフである．したがってEのスペクトラムはEの既約群指標を使って計算出来る．またVおよびEの自己同型群も決定されるが，$v=4n$のときは例外的に大きくなることも見易い．

さて対称デザインはW_kの頂点からできている位数vの完

全部分グラフとして定義される．したがって基本的な質問はまずつぎの2つであろう．

〔I〕 V に位数 v の完全部分グラフが存在するためには，n が満足すべき必要充分条件は何か？

〔II〕 〔I〕が解答されたとき，対称デザインの存在も保証されるのであろうか？

分類問題の方は V の自己同型群を W_e にふくまれる位数 v の完全部分グラフの集合上に働かせるときのオービットの個数を求めることに帰する．

このグラフは基本的なものと思われるので，もっと他の色々な性質を求めることも面白いのではなかろうか？

〔1〕 N. Ito, Symmetric design graphs
(in preparation)